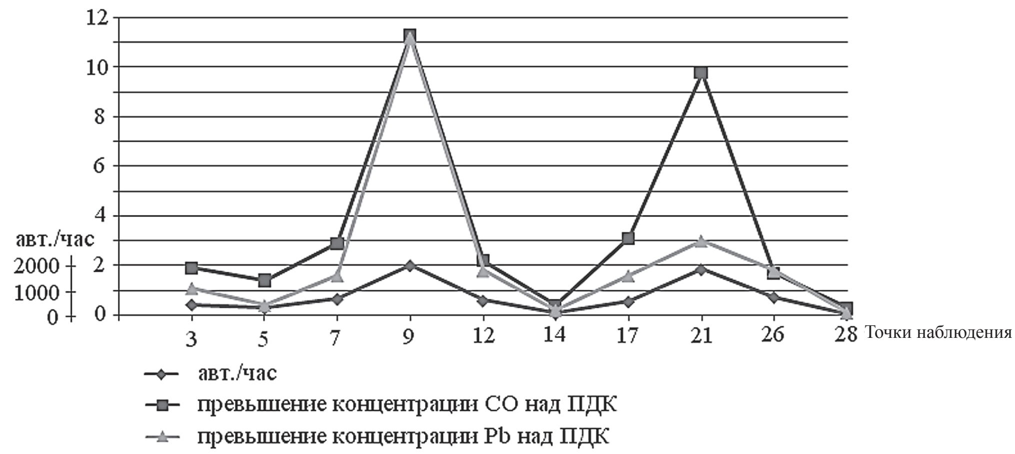

Рис. 5. Графики изменения интенсивности движения автотранспорта, превышения концентрации оксида углерода над ПДК и степени загрязнения почвенного покрова вдоль автотрасс

Библиографический список

1. *Дзюба К. С., Никулин В. В.* Автотранспорт // Эковестник Дубны. Дубна, 2001. С. 31–36.
2. Доклад о состоянии и об охране окружающей среды Саратовской области в 2012 году. Саратов, 2013. 224 с.
3. *Фельдман Ю. Г.* Гигиеническая оценка автотранспорта как источника загрязнения атмосферного воздуха. М., 1975. 160 с.
4. *Федорова А. И., Никольская А. Н.* Практикум по экологии и охране окружающей среды : учеб. пособие. Воронеж, 1997. 305 с.
5. *Алексеев С. В., Груздева Н. В., Гущина Э. В.* Экологический практикум школьника : учеб. пособие для учащихся. Самара, 2005. 304 с.
6. *Макаров В. З.* Ландшафтно-экологический анализ крупного промышленного города. Саратов, 2001. 176 с.
7. ГОСТ 17.4.4.02-84. Охрана природы. Почвы. Методы отбора и подготовки проб для химического, бактериологического и гельминтологического анализа. М., 2008. 8 с.
8. Экология : геоэкология недропользования : учебник / А. Г. Милютин, Н. К. Андросова, И. С. Калинин, А. К. Порцевский ; под ред. А. Г. Милютина. М., 2007. 440 с.

УДК [517.95+550.837+537.8]

КРИТЕРИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ МНОЖЕСТВУ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

В. П. Губатенко

Саратовский государственный университет
E-mail: gubatenkovp@gmail.com

Поставлена задача нахождения критериев принадлежности векторных полей множеству электромагнитных полей. Исследованы вопросы существования и единственности решения данной задачи. Сформулированы искомые критерии для множества переменных электромагнитных полей в частотной области в случае изотропных сред. Показано, что эти критерии разделяют множество переменных электромагнитных полей в линейных изотропных средах на два подкласса, приведены примеры полей, принадлежащих этим подклассам. Рассмотрены вопросы применимости полученных результатов для нахождения аналитических решений уравнений Максвелла и поставлена краевая обратная задача электроразведки.

Ключевые слова: геоэлектрика, электроразведка, прямые и обратные задачи, электромагнитное поле, аналитические решения, уравнения Максвелла, дифференциальные уравнения в частных производных.

Criteria Affiliation of the Vector Fields to the Set of Electromagnetic Fields

V. P. Gubatenko

Problem for finding the criteria of belonging the vector fields to the set of electromagnetic fields is formulated. The existence and uniqueness of the solution of this problem are investigated. The desired criteria for the set of alternating electromagnetic fields in the frequency domain in the case of isotropic media are formulated. It is shown that these criteria are shared set of alternating electromagnetic fields in linear isotropic media into two subclasses. Are examples of the fields belonging to these subclasses. The applicability of the results to find analytical solutions of Maxwell's equations and to formulate of inverse problems of electrical prospecting are considered.

Key words: geoelectrics, electrical prospecting, direct and inverse problems, electromagnetic field, analytical solutions, Maxwell's equations, partial differential equations.

Введение

Теоретическую основу геоэлектрики составляют аналитические и численные решения уравнений Максвелла для линейных изотропных и анизотропных сред. Аналитические решения позволяют в наиболее общем виде исследовать поведение электромагнитного поля в сложной геологической среде и определяют различные алгоритмы интерпретации полевых наблюдений. Обычно для нахождения переменного монохроматического электромагнитного поля исходят из решения различных прямых краевых задач, в которых требуется отыскать из уравнений Максвелла напряженность **E** электрического поля и напряженность **H** магнитного поля по заданному распределению в общем случае частотно-дисперсных материальных параметров среды и возбуждающих электромагнитное поле сторонних электрических и магнитных токов. Если решение уравнений Максвелла находится во всем трехмерном евклидовом пространстве R^3, то налагается дополнительное условие достаточно быстрого убывания $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ на бесконечности. В случае же односвязной ограниченной области V трехмерного евклидова пространства R^3 полагается известной тангенциальная компонента векторов **E** или **H**. Методы нахождения аналитических решений прямых задач хорошо известны [1] и, как правило, сводятся к скаляризации уравнений Максвелла и применению метода разделения переменных. Вместе с тем, число аналитических решений уравнений Максвелла невелико даже в случае двумерных (плоских и осесимметричных) задач.

В то же время решение обратных задач электроразведки применяется, как правило, для уточнения проводимости и формы аномального геологического тела в предположении, что известны электрические параметры среды, вмещающей аномальное тело. К числу основных способов решения обратных задач можно отнести метод подбора и метод продолжения (или миграции) электромагнитного поля. Метод подбора основан на многократном решении прямой задачи электроразведки в рамках заданной модели среды. В случае же метода миграции электромагнитное поле продолжается с дневной поверхности вглубь земли с помощью тензорных функций Грина для вмещающей среды [2–4]. Таким образом, при полном (или частичном) отсутствии геологической информации о параметрах вмещающей среды известные методы решения обратных электроразведки задач не применимы. В этом случае для построения геоэлектрического разреза следует поставить краевые задачи, позволяющие осуществить продолжение электромагнитного поля в изучаемую геологическую среду.

В настоящей работе предлагаются иные методы решения этих задач, основанные на изучении локальных свойств электромагнитного поля с помощью специально поставленной в настоящей работе задачи.

1. Постановка задачи определения параметров среды по заданной напряженности электрического поля

Рассмотрим в односвязной ограниченной области V трехмерного евклидова пространства R^3 два множества C_E и C_H, элементами которых соответственно являются произвольные комплексные векторные поля **E** и **H**, зависящие от декартовых прямоугольных координат x, y, z (точек $M(x, y, z) \in V$) и круговой частоты ω. При этом будем считать, что векторы $\mathbf{E} \in C_E$ наделены физической размерностью $\text{Вм}^{-1}\text{с}^{-1}$, а векторы $\mathbf{H} \in C_H$ – размерностью $\text{Ам}^{-1}\text{с}^{-1}$, т. е. векторы множеств C_E и C_H соответственно имеют размерности комплексных амплитуд напряженностей электрического и магнитного полей.

Предположим также, что в области V векторные поля $\mathbf{E} \in C_E$ и $\mathbf{H} \in C_H$ удовлетворяют следующим трем условиям:

1. $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{H} \neq 0$ для всех $M \subset V$.

2. **E** и **H** являются непрерывно дифференцируемыми векторными полями до третьего порядка включительно.

3. Существуют вещественные обратные преобразования Фурье векторов **E** и **H** по параметру ω, следовательно, эти векторы подчиняются условию эрмитовости $\overline{\mathbf{E}(M, i\omega)} = \mathbf{E}(M, -i\omega)$, $\overline{\mathbf{H}(M, i\omega)} = \mathbf{H}(M, -i\omega)$, где черта над функцией обозначает комплексное сопряжение этой функции; i – мнимая единица.

В дальнейшем будем считать, что все функции, зависящие от параметра ω, подчиняются условию эрмитовости. Отметим также, что в случаях, когда это не может вызвать недоразумений, будем опускать часть или даже все аргументы у этих функций.

Введем два подмножества $W_E \subset C_E$ и $W_H \subset C_H$, элементы которых являются решениями уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu\, \mathbf{H}, \tag{2}$$

где σ и μ – проводимость и магнитная проницаемость. Ввиду большого разнообразия горных пород не будем налагать какие-либо ограничения на физическую реализуемость проводимости и магнитной проницаемости, фигурирующих в уравнениях (1) и (2). Однако из свойств векторных полей $\mathbf{E} \in W_E$ и $\mathbf{H} \in W_H$ следует, что σ и μ есть в общем случае комплексные зависящие от частоты ω и координат *x, y, z* скалярные функции, непрерывно дифференцируемые по координатам в области *V*. Кроме того, в области *V* потребуем, чтобы $\sigma \neq 0$ и $\mu \neq 0$.

Подчеркнем, что по определению подмножеств W_E и W_H, множеств C_E и C_H векторы $\mathbf{E} \in W_E$ и $\mathbf{H} \in W_H$ есть решения уравнений Максвелла для некоторых скалярных функций σ и μ, т. е. подстановка набора функций $\{\mathbf{E} \in W_E, \mathbf{H} \in W_H, \sigma, \mu\}$ в соотношения (1) и (2) обращает эти соотношения в тождества. В этом случае в области *V* векторы $\mathbf{E} \in W_E$ и $\mathbf{H} \in W_H$ можно отождествить с комплексными амплитудами напряженностей электрического и магнитного полей, а скалярные функции σ и μ – с комплексными проводимостью и магнитной проницаемостью. Назовем объединение *W* подмножеств W_E и W_H множеством электромагнитных полей в области *V*.

Для построения подмножеств W_E и W_H и, следовательно, множества *W* поставим следующую задачу.

Задача 1. Пусть в области *V* задан произвольный вектор $\mathbf{E} \in C_E$ (или $\mathbf{H} \in C_H$) и $\omega \neq 0$. Найти в этой области отличные от нуля скалярные функции σ и μ, а также вектор $\mathbf{H} \in C_H$ (или $\mathbf{E} \in C_E$), обращающие соотношения (1) и (2) в тождества.

Если для заданного вектора $\mathbf{E} \in C_E$ (или $\mathbf{H} \in C_H$) существуют решения поставленной задачи, то набор $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \sigma, \mu\}$ обращает уравнения (1) и (2) в тождества, что означает принадлежность векторов **E** и **H** множеству *W* электромагнитных полей в области *V*. Следовательно, исследование проблемы существования решения задачи 1 позволит в общем виде определить критерии принадлежности произвольных векторных полей множеству *W*.

В то же время если найдено аналитическое решение задачи 1, то его можно трактовать следующим образом: векторные поля **E** и **H** являются в области *V* аналитическими решениями уравнений Максвелла (1), (2) для среды с найденными в ходе решения задачи 1 проводимостью σ и магнитной μ проницаемостью. Тем самым, решение данной задачи открывает возможность пополнения аналитических решений для однородных (свободных от источников) уравнений Максвелла.

2. Условия существования решения задачи 1

Пусть в области *V* произвольно задан вектор $\mathbf{E} \in C_E$ и $\omega \neq 0$. Найдем условия, при которых существует решение задачи 1. Для этого сформулируем и докажем следующие три утверждения.

1. Для существования решения задачи 1 необходимо и достаточно, чтобы искомая скалярная функция μ являлась решением уравнения

$$\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right) = 0, \tag{3}$$

за исключением случая, когда μ – решение уравнения

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right) = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть для заданного вектора $\mathbf{E} \neq 0$ существует решение задачи 1, т. е. найдены скалярные функции $\mu \neq 0$ и $\sigma \neq 0$, а также вектор $\mathbf{H} \neq 0$ такие, что подстановка $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \sigma, \mu\}$ в соотношения (1) и (2) обращает их в тождества. Исключая из (1) и (2) вектор **H**, получаем тождество

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right) = i\omega\sigma\,\mathbf{E}\,\cdot \tag{5}$$

Правая часть тождества (5) отлична от нуля, поэтому левая часть так же не равна нулю, а значит, функция μ не является решением уравнения (4). Отсюда следует, что векторы $\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right)$ и **E** коллинеарные, поэтому справедливо тождество $\mathbf{E} \times \mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right) = 0$, т. е. для заданного вектора $\mathbf{E} \in C_E$ скалярная функция μ есть решение уравнения (3).

Достаточность. Пусть для заданного вектора $\mathbf{E} \neq 0$ функция μ есть решение уравнения (3), но не является решением уравнения (4). Тогда соотношение (3) есть тождество, в котором векторы **E** и $\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right)$ не равны тождественно нулю в области *V*. Следовательно, векторы **E** и $\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right)$ коллинеарные, а значит, справедливо тождество

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{\mu}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right) = \lambda\,\mathbf{E}, \tag{6}$$

где

$$\lambda = \frac{1}{\mathbf{E}^2}\left(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right)\right) \neq 0 \cdot \qquad (7)$$

Положим, что искомые в задаче 1 функции σ и **H** равны:

$$\sigma = \frac{\lambda}{i\omega}, \ \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu}\operatorname{rot}\mathbf{E}, \qquad (8)$$

где μ – решение уравнения (3). Нетрудно убедиться в том, что сформированный набор функций $\{\mathbf{E}\in C_E, \mathbf{H}\in C_H, \sigma, \mu\}$ обращает уравнения (1) и (2) в тождества в области V. Следовательно, существование решения μ уравнения (3) для заданного вектора $\mathbf{E}\in C_E$ при условии, что μ не является решением уравнения (4), влечет для этого вектора существование решения задачи 1. Утверждение доказано.

Следствие из утверждения 1. Пусть задача 1 решается при дополнительном условии: магнитная проницаемость μ задана и не зависит от координат, т. е. $\mu = \mu_0(i\omega)$. В этом случае из утверждения 1 сразу следует, что решение этой задачи существует тогда и только тогда, когда заданный вектор **E** удовлетворяет в области V нелинейному уравнению:

$$\mathbf{E}\times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \qquad (9)$$

при этом $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}\neq 0$. Если эти условия выполнены, то искомые величины σ и **H** определяются соотношениями

$$\lambda = \frac{1}{\mu_0\mathbf{E}^2}(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}), \ \sigma = \frac{\lambda}{i\omega}, \ \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\operatorname{rot}\mathbf{E}. \qquad (10)$$

2. Решение задачи 1 для заданного вектора $\mathbf{E}\in C_E$ существует тогда и только тогда, когда всюду области V вектор **E** удовлетворяет одному из следующих двух условий:

1)

$$\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})}\operatorname{div}\left[\frac{(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})}{(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})}\mathbf{E}\right]\times \right.$$

$$\left.\times \operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})}(\mathbf{E}\times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})\right\} = 0,$$

$(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})\neq 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})\neq 0$;

2) $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) = 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}) = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E}\neq 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть для вектора $\mathbf{E}\in C_E$ существует решение задачи 1, т. е. для заданного $\mathbf{E}\in C_E$ существует вектор $\mathbf{H}\in C_H$, а также скалярные функции $\sigma\neq 0$ и $\mu\neq 0$ такие, что набор $\{\mathbf{E}\in C_E, \mathbf{H}\in C_H, \sigma, \mu\}$ обращает уравнения (1) и (2) в тождества. Покажем, что выполняется первое или второе условие утверждения 2. Нетрудно записать вытекающие из (1) и (2) тождества:

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}) = i\omega\mu\,(\mathbf{H}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}) =$$
$$= i\omega\mu\left[(\mathbf{H}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}) - \right.$$
$$\left. - (\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{H}) + (\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{H})\right] =$$
$$= i\omega\mu\left[-\operatorname{div}(\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{E}) + \right.$$
$$\left. + \sigma(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})\right] = i\omega\mu\left[-i\omega\mu\operatorname{div}(\mathbf{H}\times\mathbf{H}) + \right.$$
$$\left. + \sigma(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})\right] =$$
$$= i\omega\mu\sigma(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) = -\omega^2\mu^2\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{H}),$$

$$\operatorname{div}\left[\frac{(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})}{(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})}\mathbf{E}\right] =$$
$$= i\omega\operatorname{div}\mu\sigma\mathbf{E} = i\omega\operatorname{div}(\mu\operatorname{rot}\mathbf{H}) =$$
$$= i\omega(\operatorname{grad}\mu, \operatorname{rot}\mathbf{H}) = i\omega\sigma(\operatorname{grad}\mu, \mathbf{E}),$$
$$\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega(\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\mu\mathbf{H}) =$$
$$= i\omega\mathbf{E}\times(\mu\operatorname{rot}\mathbf{H} + \operatorname{grad}\mu\times\mathbf{H}) =$$
$$= i\omega\mathbf{E}\times(\mu\sigma\mathbf{E} + \operatorname{grad}\mu\times\mathbf{H}) =$$
$$= i\omega\left[(\mathbf{E}, \mathbf{H})\operatorname{grad}\mu - (\operatorname{grad}\mu, \mathbf{E})\right]\mathbf{H}$$

Таким образом,

$$(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}) = i\omega\mu\sigma(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) = = -\omega^2\mu^2\sigma(\mathbf{E}, \mathbf{H}), \qquad (11)$$

$$\operatorname{div}\left[\frac{(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})}{(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})}\mathbf{E}\right] = i\omega\sigma(\operatorname{grad}\mu, \mathbf{E}), \qquad (12)$$

$$\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\left[(\mathbf{E}, \mathbf{H})\operatorname{grad}\mu - (\operatorname{grad}\mu, \mathbf{E})\right]\mathbf{H}. \qquad (13)$$

Вывод формулы (11) основан на тождестве векторного анализа [5]:

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \operatorname{rot}\mathbf{a}) - (\mathbf{a}, \operatorname{rot}\mathbf{b}), \qquad (14)$$

формула (12) следует из (11), а для доказательства тождества (13) применялось тождество векторной алгебры [5]:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{c}, \mathbf{a})\mathbf{b}. \qquad (15)$$

Формула (12) имеет смысл, если $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})\neq 0$ в области V.

Пусть $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})\neq 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})\neq 0$. Введем вектор

$$\mathbf{F}^E = \frac{1}{(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})}\operatorname{div}\left[\frac{(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})}{(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})}\mathbf{E}\right]\operatorname{rot}\mathbf{E} + + \frac{1}{(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})}(\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}) \qquad (16)$$

и покажем, что

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}^E = 0 \cdot \qquad (17)$$

Действительно, учитывая тождество $\operatorname{rot}\mathbf{E} = i\omega\mu\,\mathbf{H}$ и подставляя формулы (11) – (13) в выражение (16), получаем:

$$\mathbf{F}^E = \frac{1}{\mu}\operatorname{grad}\mu = \operatorname{grad}(\ln\mu). \qquad (18)$$

Отсюда следует, что вектор $\mathbf{F}^E$ потенциальный, поэтому справедливо тождество (17). Необходимость первого условия утверждения 2 доказана.

При доказательстве необходимости первого условия данного утверждения использовалось существенное ограничение – скаляры $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})$ и $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})$ отличны от нуля в области V. В противном случае, теряется смысл вектора $\mathbf{F}^E$. Из условий $\mathbf{E} \neq 0$, $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) \neq 0$ следует, что и $\operatorname{rot}\mathbf{E} \neq 0$. Так как $\mu \neq 0$, $\omega \neq 0$, то формула (11) раскрывает физический смысл ограничения $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) = i\omega\mu(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \neq 0$: напряженности электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей не ортогональны в области V.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Поскольку $\mu \neq 0$, $\sigma \neq 0$, $\omega \neq 0$, то, как следует из формулы (11), случаи $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) \neq 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}) = 0$ и $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) = 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}) \neq 0$ невозможны. Тождеству (11) не противоречит последний случай: $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) = 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}) = 0$. Он будет иметь место, например, если $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, что означает потенциальность вектора $\mathbf{E}$. Но, как следует из соотношения (2), такая ситуация невозможна, так как по предположению $\mathbf{H} \neq 0$, $\mu \neq 0$, $\omega \neq 0$. Поэтому при выполнении условий $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) = 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}) = 0$ надо исключить случай $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$. Второе необходимое условие утверждения 2 доказано. Заметим лишь, что поскольку $\mathbf{E} \neq 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{E} \neq 0$, то случай $(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) = 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}) = 0$ влечет ортогональность векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Следовательно, второе условие утверждения 2 является вырожденным – векторные поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ортогональны.

Достаточность. Докажем, что для заданного $\mathbf{E} \in C_E$ при выполнении первого или второго условия утверждения 2 решение задачи 1 существует. В соответствии с утверждением 1 исследование вопроса существования решения задачи 1 сводится к изучению совместности уравнения (3). Это исследование можно провести, записывая уравнение (3) в прямоугольных декартовых координатах x, y, z в виде системы трех дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и изучая совместность полученной системы. Тем не менее доказательство утверждения 2 будем преимущественно проводить в векторной форме, что приведет к тем же результатам, но значительно быстрее.

Для сокращения записи формул введем обозначения $\xi = \ln\mu$, $\mathbf{Q} = \operatorname{rot}\mathbf{E}$, $\mathbf{R} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{rot}\mathbf{Q}$. Запишем уравнение (3) в виде

$$\mathbf{E} \times (\operatorname{grad}\xi \times \mathbf{Q}) = \mathbf{E} \times \mathbf{R}. \qquad (19)$$

Применяя тождество (15) к левой части этого уравнению, получаем то же уравнение, но в другой форме

$$(\mathbf{E}, \mathbf{Q})\operatorname{grad}\xi - (\operatorname{grad}\xi, \mathbf{E})\mathbf{Q} = \mathbf{E} \times \mathbf{R}. \qquad (20)$$

Скалярное произведение левой и правой частей соотношения (20) на вектор $\mathbf{R}$ и векторное произведение того же на вектор $\mathbf{Q}$ приводит к соотношениям

$$(\mathbf{E}, \mathbf{Q})(\operatorname{grad}\xi, \mathbf{R}) - (\mathbf{Q}, \mathbf{R})(\operatorname{grad}\xi, \mathbf{E}) = 0, \qquad (21)$$

$$(\mathbf{E}, \mathbf{Q})\operatorname{grad}\xi \times \mathbf{Q} = -\mathbf{G}, \qquad (22)$$

где

$$\mathbf{G} = (\mathbf{Q}, \mathbf{R})\mathbf{E} - (\mathbf{E}, \mathbf{Q})\mathbf{R} = \mathbf{Q} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{R}). \qquad (23)$$

Если $(\mathbf{E}, \mathbf{Q}) \neq 0$, то соотношение (22) примет вид

$$\operatorname{grad}\xi \times \mathbf{Q} = -\frac{\mathbf{G}}{(\mathbf{E}, \mathbf{Q})}. \qquad (24)$$

Подействуем оператором div на обе части выражения (24) и применим тождество (14). Тогда

$$(\operatorname{grad}\xi, \mathbf{R}) = \operatorname{div}\frac{\mathbf{G}}{(\mathbf{E}, \mathbf{Q})}, \qquad (25)$$

и при $(\mathbf{E}, \mathbf{Q}) \neq 0$, $(\mathbf{Q}, \mathbf{R}) \neq 0$, как следует из выражений (21) и (25), имеем

$$(\operatorname{grad}\xi, \mathbf{E}) = \frac{(\mathbf{E}, \mathbf{Q})}{(\mathbf{Q}, \mathbf{R})}\operatorname{div}\frac{\mathbf{G}}{(\mathbf{E}, \mathbf{Q})}.$$

Применяя последнее соотношение и формулу (20), находим

$$\operatorname{grad}\xi = \mathbf{F}^{\mathrm{E}}, \qquad (26)$$

где вектор $\mathbf{F}^{\mathrm{E}} = \left(F_x^{\mathrm{E}}, F_y^{\mathrm{E}}, F_z^{\mathrm{E}}\right)$ определяется выражением

$$\mathbf{F}^{\mathrm{E}} = \frac{1}{(\mathbf{Q}, \mathbf{R})}\operatorname{div}\left[\frac{(\mathbf{Q}, \mathbf{R})}{(\mathbf{E}, \mathbf{Q})}\mathbf{E}\right]\mathbf{Q} + \frac{1}{(\mathbf{E}, \mathbf{Q})}(\mathbf{E} \times \mathbf{R}).$$

Переходя к старым обозначениям, видим, что

$$\mathbf{F}^E = \frac{1}{(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})}\operatorname{div}\left[\frac{(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E})}{(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})}\mathbf{E}\right]\operatorname{rot}\mathbf{E} + \frac{1}{(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E})}(\mathbf{E} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}),$$

т. е. данное выражение для вектора $\mathbf{F}^E$ совпадает с выражением (16).

Рассмотрим три разных случая, которыми исчерпывается все ситуации, встречающиеся при решении задачи 1.

1). Пусть $(\mathbf{E},\mathbf{Q}) \neq 0$ и $(\mathbf{Q},\mathbf{R}) \neq 0$. Тогда $\mathbf{Q} \neq 0$ и $\mathbf{R} \neq 0$, и уравнение (26) получено в результате последовательного применения тождественных преобразований уравнения (19), не обращающих в тождества соотношения (20) – (26), если функция ξ не является решением уравнения (19). Если же ξ – решение уравнения (19), то эти соотношения обращаются в тождества и поэтому всякое решение ξ уравнения (19) является так же решением уравнения (26). Справедливо и обратное утверждение: любое решение ξ уравнения (26) есть решение уравнения (19). В самом деле, пусть функция ξ – решение уравнения (26). Тогда соотношение (26) обращается в тождество. При этом условии вычислим левую часть соотношения (19). Применяя формулы (15) и (23), получаем

$$\operatorname{grad}\xi \times \mathbf{Q} = \vec{F}^E \times \mathbf{Q} = \left(\frac{1}{(\mathbf{Q},\mathbf{R})}\operatorname{div}\left[\frac{(\mathbf{Q},\mathbf{R})}{(\mathbf{E},\mathbf{Q})}\mathbf{E}\right]\mathbf{Q} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(\mathbf{E},\mathbf{Q})}(\mathbf{E}\times\mathbf{R})\right)\times\mathbf{Q} =$$

$$= \frac{1}{(\mathbf{E},\mathbf{Q})}(\mathbf{E}\times\mathbf{R})\times\mathbf{Q} = -\frac{1}{(\mathbf{E},\mathbf{Q})}\mathbf{Q}\times(\mathbf{E}\times\mathbf{R}) =$$

$$= -\frac{1}{(\mathbf{E},\mathbf{Q})}\left[(\mathbf{Q},\mathbf{R})\mathbf{E} - (\mathbf{E},\mathbf{Q})\mathbf{R}\right]$$

и тогда

$$\mathbf{E}\times(\operatorname{grad}\xi\times\mathbf{Q}) = \mathbf{E}\times\mathbf{R}$$

т. е. левая часть соотношения (19) тождественно равна правой части этого соотношения. Следовательно, всякое решение уравнения (26) есть решение уравнения (19).

Данный результат позволяет сделать следующий вывод: при заданном векторе **E** и дополнительных условиях $(\mathbf{E},\mathbf{Q}) \neq 0$, $(\mathbf{Q},\mathbf{R}) \neq 0$ или не существует решений уравнений (19) и (26), или эти уравнения имеют одни и те же решения. Очевидно, что решение уравнения (26) существует тогда и только тогда, когда вектор $\mathbf{F}^E$ является потенциальным, т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{F}^{\mathrm{E}} = 0$. Значит, если $\operatorname{rot}\mathbf{F}^{\mathrm{E}} = 0$ и $(\mathbf{E},\mathbf{Q}) \neq 0$, $(\mathbf{Q},\mathbf{R}) \neq 0$, то уравнение (19) имеет те же решения, что и уравнение (26).

При выполнении условий $(\mathbf{E},\mathbf{Q}) \neq 0, (\mathbf{Q},\mathbf{R}) \neq 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{F}^{\mathrm{E}} = 0$ общее решение уравнения (26) и, следовательно, общее решение уравнения (19) имеют вид

$$\mu = \mu_0(i\omega)\exp\left(\int_{M_0}^{M} F_x^{\mathrm{E}}dx + F_y^{\mathrm{E}}dy + F_z^{\mathrm{E}}dz\right), \quad (27)$$

где $\vec{F}^E = \left(F_x^E, F_y^E, F_z^E\right)$; $M(x,y,z) \in V$, $M_0(x_0,y_0,z_0) \in V$.

Подставляя найденное решение (27) в формулы (7) и (8), найдем напряженность **H** магнитного поля и проводимость σ. Комплексная магнитная проницаемость μ, так же как и комплексная проводимость σ, определяется с точностью до произвольного не зависящего от координат множителя $\mu_0(i\omega)$. Достаточность первого условия утверждения 2 доказана.

2. Пусть $(\mathbf{E},\mathbf{Q}) \neq 0$, $(\mathbf{Q},\mathbf{R}) = 0$. Тогда, как следует из выражений (21) – (23), для функции ξ имеем уравнения

$$(\operatorname{grad}\xi\times\mathbf{Q}) = \mathbf{R}, \quad (28)$$

$$(\operatorname{grad}\xi,\mathbf{R}) = 0. \quad (29)$$

Уравнение (29) является следствием уравнения (28), в чем легко убедиться, вычисляя векторное произведение левой и правой частей уравнения (28) на вектор **R** и применяя формулу (15). Поэтому всякое решение уравнения (28) будет решением уравнения (29), и уравнение (29) можно опустить.

В то же время не трудно заметить, что уравнения (4) и (28), записанные в одних обозначениях, идентичны. Как было уже показано при доказательстве утверждения 1, решение μ уравнения (4), а следовательно, и уравнения (28) следует исключить из рассмотрения, так как в этом не существует решения задачи 1.

3. Пусть теперь $(\mathbf{E},\mathbf{Q}) = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{Q} \neq 0$ в области *V*. Тогда из соотношения (20) следует, что функция ξ является решением уравнения (19) тогда и только тогда, когда ξ удовлетворяет уравнению

$$(\operatorname{grad}\xi,\mathbf{E})\mathbf{Q} = -\mathbf{E}\times\mathbf{R}. \quad (30)$$

Далее, из выражения (22), следует, что **G** = 0, а так как $(\mathbf{E},\mathbf{Q}) = 0$, то

$$(\mathbf{Q},\mathbf{R})\mathbf{E} - (\mathbf{E},\mathbf{Q})\mathbf{R} = (\mathbf{Q},\mathbf{R})\mathbf{E} = 0.$$

Поскольку вектор **E** не равен нулю в области *V*, то для выполнения последнего равенства необходимо и достаточно, чтобы $(\mathbf{Q},\mathbf{R}) = 0$. Условия $(\mathbf{E},\mathbf{Q}) = 0$, $(\mathbf{Q},\mathbf{R}) = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mathbf{Q} \neq 0$ равносильны второму условию утверждения 2.

Покажем, что при выполнении этих условий уравнение (30) имеет общее решение. Вспоминая, что $\xi = \ln\mu$, запишем уравнение (30) в координатной форме

$$\left(E_x\frac{\partial\mu}{\partial x} + E_y\frac{\partial\mu}{\partial y} + E_z\frac{\partial\mu}{\partial z}\right)Q_x = -\mu\left(E_yR_z - E_zR_y\right),$$

$$\left(E_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + E_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + E_z \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) Q_y = -\mu\left(E_z R_x - E_x R_z\right), \quad (31)$$

$$\left(E_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + E_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + E_z \frac{\partial \mu}{\partial z}\right) Q_z = -\mu\left(E_x R_y - E_y R_x\right),$$

где $\mathbf{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right)$, $\mathbf{Q} = \left(Q_x, Q_y, Q_z\right)$, $\mathbf{R} = \left(R_x, R_y, R_z\right)$.

Так как вектор $\mathbf{Q} \neq 0$, а вектор $\mathbf{G} = \mathbf{Q} \times \left(\mathbf{E} \times \mathbf{R}\right)$ тождественно равен нулю в области *V*, то либо векторы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{E} \times \mathbf{R}$ являются коллинеарными векторами в этой области, если $\mathbf{E} \times \mathbf{R} \neq 0$, либо функция μ есть решение уравнения

$$E_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + E_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + E_z \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0, \quad (32)$$

если $\mathbf{E} \times \mathbf{R} = 0$ в области *V*. Уравнение (32) является условием ортогональности вектора **E** поверхностям уровня скалярного поля μ.

В случае $\mathbf{E} \times \mathbf{R} \neq 0$ векторы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{E} \times \mathbf{R}$ являются коллинеарными, поэтому не все уравнения системы (31) (в силу того, что $\mathbf{Q} \neq 0$) обращаются в тождества, если соответствующие компоненты вектора **Q** равны нулю, а оставшиеся уравнения совпадают. Например, если $Q_x \neq 0$, то система уравнений (31) эквивалентна одному линейному неоднородному уравнению в частных производных первого порядка:

$$E_x \frac{\partial \mu}{\partial x} + E_y \frac{\partial \mu}{\partial y} + E_z \frac{\partial \mu}{\partial z} = -\mu \frac{E_y R_z - E_z R_y}{Q_x}. \quad (33)$$

Общее решение такого уравнения существует [6] и может быть найдено с помощью соответствующей характеристической системы уравнений

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} = -\frac{Q_x d\mu}{\left(E_y R_z - E_z R_y\right)\mu}. \quad (34)$$

При этом общее решение уравнения (33) в неявной форме имеет вид

$$\Phi(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = 0, \quad (35)$$

где $\Phi(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция; $C_1 = \eta_1(x, y, z, \mu, i\omega)$, $C_2 = \eta_2(x, y, z, \mu, i\omega)$, $C_3 = \eta_3(x, y, z, \mu, i\omega)$ – независимые первые интегралы характеристической системы (34). Уравнение (35) в силу независимости функций η_1, η_2, η_3 всегда разрешимо относительно неизвестной функции μ. Определив из уравнения (35) функцию μ, находим с помощью формул (7) и (8) оставшиеся неизвестные **H** и σ.

Если же $\mathbf{E} \times \mathbf{R} = 0$ в области *V*, то, как известно [6], общее решение уравнения (32), так же как и в предыдущем случае, существует. Для его нахождения можно, например, составить характеристическое уравнение

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (36)$$

и найти его независимые первые интегралы $C_1 = \varsigma_1\left(x, y, z, i\omega\right)$, $C_2 = \varsigma_2\left(x, y, z, i\omega\right)$. Тогда общий интеграл уравнения (32) примет вид

$$\mu = \Phi_1\left(\varsigma_1\left(x, y, z, i\omega\right), \varsigma_2\left(x, y, z, i\omega\right)\right), \quad (37)$$

где $\Phi_1(\varsigma_1, \varsigma_2)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Очевидно, что в этом семействе решений содержится также решение

$$\mu = \mu_0\left(i\omega\right).$$

Подставляя теперь μ и **E** в формулы (7) и (8), не трудно найти функции σ и **H**. Достаточность второго условия утверждения 2 доказана.

Замечание к утверждению 2. Как следует из доказательства этого утверждения, задача 1 для заданного вектора $\mathbf{E} \in C_E$, подчиняющегося условиям $\left(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}\right) \neq 0$, $\left(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right) \neq 0$, имеет решение $\mu = \mu_0\left(i\omega\right)$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{F}^E \equiv 0$ в области *V*. В свою очередь, при тех же условиях для выполнения условия $\mathbf{F}^E \equiv 0$ необходимо и достаточно, чтобы вектор **E** удовлетворял в области *V* нелинейному дифференциальному уравнению

$$\mathbf{E} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \quad (38)$$

Действительно, пусть **E** – решение данного уравнения. Тогда в области *V* справедливо тождество $\mathbf{E} \times \mathbf{R} = \mathbf{E} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} \equiv 0$. Применяя формулу (23), выражение для вектора $\mathbf{F}^E$ можно записать в виде

$$\mathbf{F}^E = \frac{1}{\left(\mathbf{Q}, \mathbf{R}\right)} \operatorname{div}\left[\frac{\mathbf{Q} \times \left(\mathbf{E} \times \mathbf{R}\right)}{\left(\mathbf{E}, \mathbf{Q}\right)}\right]\mathbf{Q} + \frac{1}{\left(\mathbf{E}, \mathbf{Q}\right)}\left(\mathbf{E} \times \mathbf{R}\right).$$

Подставляя в это выражение $\mathbf{E} \times \mathbf{R} \equiv 0$, получаем $\mathbf{F}^E \equiv 0$.

Обратно, если $\mathbf{F}^E \equiv 0$, то

$$\frac{1}{\left(\mathbf{Q}, \mathbf{R}\right)} \operatorname{div}\left[\frac{\mathbf{Q} \times \left(\mathbf{E} \times \mathbf{R}\right)}{\left(\mathbf{E}, \mathbf{Q}\right)}\right]\mathbf{Q} \equiv -\frac{1}{\left(\mathbf{E}, \mathbf{Q}\right)}\left(\mathbf{E} \times \mathbf{R}\right). \quad (39)$$

Если предположить, что $\mathbf{E} \times \mathbf{R} \neq 0$, то обе части тождества (38) отличны от нуля, следовательно, **Q** и $\mathbf{E} \times \mathbf{R}$ – коллинеарные векторы. Но тогда $\mathbf{Q} \times \left(\mathbf{E} \times \mathbf{R}\right) \equiv 0$, и, применяя формулу (23), имеем $\mathbf{R} \equiv \frac{\left(\mathbf{Q}, \mathbf{R}\right)}{\left(\mathbf{E}, \mathbf{Q}\right)}\mathbf{E}$. Отсюда $\mathbf{E} \times \mathbf{R} \equiv 0$, что противоречит предположению. Следовательно, $\mathbf{F}^E \equiv 0$ тогда и только тогда, когда вектор **E** удовлетворяет в области *V* уравнению (38).

Если же $\left(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}\right) = 0$, $\left(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right) = 0$,

$\operatorname{rot}\mathbf{E} \neq 0$, то для существования решения $\mu = \mu_0(i\omega)$, как следует из соотношений (13) и (31), необходимо и достаточно, чтобы заданный вектор **E** удовлетворял уравнению (38). Таким образом, утверждение 2 не противоречит следствию из утверждения 1.

Пусть теперь в области *V* произвольно задан вектор $\mathbf{H} \in C_H$ и $\omega \neq 0$.

3. Решение задачи 1 для заданного вектора $\mathbf{H} \in C_H$ существует тогда и только тогда, когда всюду области *V* вектор **H** удовлетворяет одному из следующих двух условий:

1)

$$\operatorname{rot}\left\{\frac{1}{(\operatorname{rot}\mathbf{H}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H})}\operatorname{div}\left[\frac{(\operatorname{rot}\mathbf{H}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H})}{(\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{H})}\mathbf{H}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\operatorname{rot}\mathbf{H} + \frac{1}{(\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{H})}(\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H})\right\} = 0;$$

$(\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{H}) \neq 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{H}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}) \neq 0$;

2) $(\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{H}) = 0$, $(\operatorname{rot}\mathbf{H}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{H}) = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{H} \neq 0$.

Формулировка и доказательство этого утверждения следуют из утверждений 1 и 2, а также из симметрии уравнений (1) и (2) относительно формальной замены $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$, $i\omega\mu \leftrightarrow \sigma$, называемой принципом перестановочной двойственности [7].

Очевидно, что векторы $\mathbf{E} \in W$ и $\mathbf{H} \in W$, являющиеся в области *V* решениями системы однородных уравнений Максвелла (1) и (2), удовлетворяют одновременно в этой области либо первым условиям утверждений 2 и 3, либо вторым. Отсюда следует, что множество всех частных решений **E** и **H** однородных уравнений Максвелла (1) и (2) с различными гладкими материальными параметрами σ и μ разбивается на два подкласса. К первому подклассу относится множество векторов **E** и **H**, удовлетворяющих первым условиям утверждений 2 и 3, а ко второму подклассу – множество векторов **E** и **H**, удовлетворяющих вторым условиям этих утверждений. Первому подклассу принадлежит множество решений уравнений (1) и (2) с неортогональными векторами **E** и **H**. Второй подкласс решений – вырожденный и соответствует частному случаю ортогональных векторов **E** и **H**.

Изложенные свойства электромагнитных полей являются локальными, и они не выполняются для всего евклидова пространства R^3. Они применимы лишь для непрерывно дифференцируемых параметров среды σ и μ, а также при условии отсутствия в области $V \subset R^3$ сторонних электрических и магнитных токов. В случае неограниченной области *V* условия утверждений 2 и 3 следует усилить требованием достаточно быстрого убывания векторов **E** и **H** на бесконечности.

Вместе с тем, данные свойства, как будет показано далее, могут оказаться полезными для нахождения аналитических решений однородных уравнений Максвелла и постановки обратных задач электроразведки.

3. Нахождение аналитических решений уравнений Максвелла

Метод нахождения аналитических решений однородных уравнений Максвелла рассмотрим только на примере задания вектора **E**. Применяя принцип перестановочной двойственности, легко получить аналогичные результаты для заданного вектора **H**.

Пусть вектор **E** принадлежит множеству C_E и задан в области *V* аналитическим выражением. Алгоритм нахождения аналитического решения уравнений Максвелла сводится к следующим этапам.

1. Если заданный вектор **E** не удовлетворяет первому или второму условию утверждения 2, то этот вектор не принадлежит подмножеству W_E, т. е. не существует скалярных функций μ, σ и векторного поля **H**, которые вместе с заданным векторным полем **E** обращали уравнений (1) и (2) в тождества. Для такого вектора **E** невозможно найти решение уравнений (1) и (2).

2. Вектор **E** удовлетворяет первому условию утверждения 2. Тогда по формулам (27), (7) и (8) несложно найти магнитную проницаемость μ, проводимость σ и напряженность **H** магнитного поля. В этом случае набор $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \sigma, \mu\}$ будет представлен аналитическими выражениями и обращает уравнения (1) и (2) в тождества. Следовательно, векторы **E** и **H** являются аналитическими решениями уравнений Максвелла для найденных параметров среды μ и σ.

3. Вектор **E** подчиняется второму условию утверждения 2. Если при этом $\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} \neq 0$, то магнитная проницаемость μ находится как решение того уравнения системы (31), для которого одна из компонент Q_x, Q_y или Q_z вектора $\mathbf{Q} = \operatorname{rot}\mathbf{E}$ отлична от нуля. Если же $\mathbf{E}\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, то μ определяется из уравнения (32). В обоих случаях решение μ может быть найдено с помощью ха-

рактеристических уравнений, после чего проводимость σ и напряженность $\mathbf{H}$ магнитного поля находятся из соотношений (7) и (8).

Рассмотрим один частный случай этого алгоритма. Пусть теперь в области V аналитическим выражением не только задан вектор $\mathbf{E} \in C_E$, но и известна независящая от координат магнитная проницаемость $\mu = \mu_0$. Тогда для отыскания аналитических решений однородных уравнений Максвелла можно воспользоваться следствием к утверждению 1. Заметим только, что если вектор $\mathbf{E} \in C_E$ является решением уравнения (9) и при этом $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} \neq 0$, то это возможно лишь в двух случаях:

1) $\left(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}\right) \neq 0$, $\left(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right) \neq 0$;

2) $\left(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}\right) = 0$, $\left(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right) = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} \neq 0$.

В самом деле, для любого вектора $\mathbf{E} \in C_E$, как следует из (15), справедливо тождество

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} \times \left(\mathbf{E} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right) \equiv \left(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right)\mathbf{E} - \\ - \left(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}\right)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}.$$

Вместе с тем, если $\mathbf{E}$ – решение уравнения (9), то

$$\mathbf{E} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} \equiv 0,$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right)\mathbf{E} \equiv \left(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}\right)\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}.$$

Поскольку $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} \neq 0$, то $\mathbf{E} \neq 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} \neq 0$, и из последнего тождества следует, что должно выполняться одно из двух: либо $\left(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}\right) \neq 0$, $\left(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right) \neq 0$, либо $\left(\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{E}\right) = 0$, $\left(\operatorname{rot}\mathbf{E}, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}\right) = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{E} \neq 0$.

Таким образом, в случае заданных $\mathbf{E}$ и $\mu = \mu_0$ аналитические решения уравнений Максвелла находятся по следующей схеме:

1. Проверяется условие $\mathbf{E} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$. Если оно не выполняется, то для заданных $\mathbf{E}$ и $\mu = \mu_0$ не существует скалярной функции σ и вектора $\mathbf{H}$ таких, что набор $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \sigma, \mu_0\}$ обращает в тождества уравнения (1) и (2).

2. Если вектор $\mathbf{E}$ является решением уравнения $\mathbf{E} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, то из соотношений (10) определяются проводимость σ и напряженность $\mathbf{H}$. Полученный набор функций $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \sigma, \mu\}$ обращает уравнения (1) и (2) в тождества и, тем самым, определяет аналитическое решение однородных уравнений Максвелла.

Различные применения изложенного алгоритма рассмотрены в работах [8–10].

4. Постановка обратной задачи электроразведки

Пусть область $V = \left\{M\left(x, y, z\right) \in R^3 \mid z > 0\right\}$ (земля) заполнена изотропной немагнитной средой ($\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$) с неизвестной частотно-дисперной проводимостью $\sigma = \sigma\left(x, y, z, i\omega\right)$. Такой выбор магнитной проницаемости обусловлен тем, что решение обратной задачи электроразведки о нахождении проводимости среды с неизвестной магнитной проницаемостью не единственно [11], а также тем, что немагнитными свойствами обладает подавляющее большинство горных пород. Кроме того, будем считать, что возбуждающие электромагнитное поле сторонние токи расположены в области $R^3 \setminus V = \left\{M\left(x, y, z\right) \in R^3 \mid z \leq 0\right\}$, и исключим из рассмотрения поверхностные сторонние токи на поверхности земли $z = 0$. В этом случае, как было показано в настоящей работе, напряженность $\mathbf{E}$ электрического поля в области V удовлетворяет уравнению (9)

$$\mathbf{E} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0. \qquad (40)$$

Пусть неизвестный параметр $\sigma = \sigma\left(x, y, z, i\omega\right)$ удовлетворяет условиям

$$\sigma\left(M, i\omega\right) \neq 0,\ \operatorname{Re}\sigma\left(M, i\omega\right) \geq 0, \\ \sigma\left(M, i\omega\right) \in C^{k-1}\left(V\right),\ k \geq 3. \qquad (41)$$

Второе из них есть условие физической реализуемости [12], а третье – условие гладкости проводимости.

Предположим, что на поверхности земли $z = +0$

$$\sigma = \sigma^0\left(x, y, +0, i\omega\right),\ \mathbf{E} = \mathbf{E}^0\left(x, y, +0, i\omega\right), \\ \mathbf{H} = \mathbf{H}^0\left(x, y, +0, i\omega\right), \qquad (42)$$

где $\sigma^0\left(x, y, +0, i\omega\right)$, $\mathbf{E}^0\left(x, y, +0, i\omega\right) = \left(E_x^0, E_y^0, E_z^0\right)$, $\mathbf{H}^0\left(x, y, +0, i\omega\right) = \left(H_x^0, H_y^0, H_z^0\right)$ – известные функции. Если $E_z^0 \neq 0$, то условия (42) равносильны соотношениям

$$E_x = E_x^0\left(x, y, +0, i\omega\right),\ E_y = E_y^0\left(x, y, +0, i\omega\right),$$

$$E_z = E_z^0\left(x, y, +0, i\omega\right),\ \left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=+0} = \varphi\left(x, y, +0, i\omega\right), \qquad (43)$$

$$\left.\frac{\partial E_y}{\partial z}\right|_{z=+0} = \psi\left(x, y, +0, i\omega\right),$$

а если $E_z^0 = 0$, то вместо (43) следует записать

$$\sigma = \sigma^0\left(x, y, +0, i\omega\right), \; E_x = E_x^0\left(x, y, +0, i\omega\right),$$
$$E_y = E_y^0\left(x, y, +0, i\omega\right), \left.\frac{\partial E_x}{\partial z}\right|_{z=+0} = \varphi\left(x, y, +0, i\omega\right) \quad (44)$$
$$\left.\frac{\partial E_y}{\partial z}\right|_{z=+0} = \psi\left(x, y, +0, i\omega\right),$$

где функции φ и ψ определяются из (42).

Необходимо также потребовать, чтобы

$$\lim_{z\to+\infty} \mathbf{E}\left(M, i\omega\right) = 0, \; \lim_{z\to+\infty} \mathbf{H}\left(M, i\omega\right) = 0. \quad (45)$$

Тогда в соответствии с утверждениями 1 и 2 можно поставить следующую краевую обратную задачу.

Задача 2. Найти в области V решение $\mathbf{E}$ уравнения (40), удовлетворяющее условиям (43), (45) при $E_z^0 \neq 0$ или условиям (44), (45) в случае $E_z^0 = 0$.

После отыскания решения поставленной краевой задачи можно определить в области V искомую проводимость $\sigma = \sigma\left(x, y, z, i\omega\right)$, а также напряженность $\mathbf{H} = \mathbf{H}\left(M, i\omega\right)$ магнитного поля по формулам (10).

Заметим, что если найденное из уравнений (1) и (2) и условий (42) и (45) решение $\sigma = \sigma\left(x, y, z, i\omega\right)$ единственно, то решение краевой задачи 2 также единственно. Вместе с тем, в работе [13] приведен пример неоднозначности решение обратной задачи в случае частотно-дисперсной проводимости. Поэтому для нахождения единственного решения поставленной краевой задачи необходимо привлечь априорную информацию о законе частотной дисперсии проводимости. Если, например, известно, что σ не зависит от ω (например, в случае квазистационарного приближения, широко применяемого в электроразведке), то можно воспользоваться методом [14], разработанным для обратной задачи акустики. В самом деле, так как проводимость σ, определяемая формулой (10), не зависит от круговой частоты ω, то

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left[\frac{1}{\omega\mathbf{E}^2}\left(\mathbf{E}, \mathrm{rot\,rot}\,\mathbf{E}\right)\right] = 0. \quad (46)$$

Следовательно, в данном случае краевая обратная задача сводится к отысканию решения $\mathbf{E}$ в области V, удовлетворяющего уравнениям (40), (46), а также условиям (43), (45) при $E_z^0 \neq 0$ или условиям (44), (45) в случае $E_z^0 = 0$.

Полученный результат показывает возможность редукции обратных задач электроразведки к решению нелинейных краевых задач, что открывает новые возможности для продолжения электромагнитного поля с дневной поверхности вглубь земли.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ проекта 10-05-00753-а).

Библиографический список

1. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн : в 2 т. М., 1978. Т. 1. 547 с. ; Т. 2. 555 с.
2. *Жданов М. С.* Продолжение нестационарных электромагнитных полей в задачах геоэлектрики // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1981. № 12. С. 60–69.
3. *Жданов М. С., Френкель М. А.* Метод электромагнитной миграции при решении обратных задач в геоэлектрике // ДАН СССР. 1983б. Т. 271, № 3. С. 589–594.
4. *Жданов М. С., Спичак В. В.* Интегралы типа Стрэттона-Чу для неоднородных сред и некоторые их приложения к задачам геоэлектрики // Математическое моделирование электромагнитных полей. М., 1983. С. 4–25
5. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., 1965. 424 с.
6. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М., 1969. 424 с.
7. *Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В.* Электромагнитные поля и волны. М., 1971. 664 с.
8. *Губатенко В. П.* Нахождение аналитических решений задач геоэлектрики на основе решения обратной задачи // Недра Поволжья и Прикаспия. 2011. Вып. 67. С. 34–46.
9. *Губатенко В. П., Московский И. Г.* Аналитические решения трехмерных задач геоэлектрики // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Науки о Земле. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 62–68.
10. *Московский И. Г., Губатенко В. П.* Некоторые примеры аналитических решений трехмерных задач геоэлектрики для монохроматического электромагнитного поля // Недра Поволжья и Прикаспия. 2013. Вып. 74. С. 66–71.
11. *Губатенко В. П.* Обобщенные функции с приложениями в теории электромагнитного поля : учеб. пособие. Саратов, 2001. 138 с.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., 1982. 620 с.
13. *Gubatenko V. P.* On the formulation of inverse problem in electrical prospecting // Inverse Problems and Large-Scale Computations. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. 52 / eds. L. Beilina, Yu. V. Shestopalov. N.Y., 2013. P. 21–28.
14. *Beilina L. and Klibanov M. V.* A globally convergent numerical method for a coefficient inverse problem // SIAM J. Sci. Comp. 2008. Vol. 31. P. 478–509.