



7. Букина Т. Ф. Седиментогенез и ранний литогенез верхнеюрских сланценосных отложений центральной части Волжского бассейна : автореф. дис. ... канд. геол.-минер. наук. М., 1988. 24 с.

8. Кулева Г. В., Яночкина З. А., Букина Т. Ф., Иванов А. В., Барышникова В. И., Троицкая Е. А., Еремин В. Н. Разрез верхнеюрских сланценосных отложений Волжского бас-

УДК 550.837

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

В. П. Губатенко\*, И. Г. Московский\*\*

\* Саратовский государственный университет  
E-mail: gubatenkovp@gmail.com

\*\* Саратовский государственный технический университет  
E-mail: mosig@mail.ru

Предложен метод нахождения аналитических решений уравнений Максвелла для стационарных и переменных электромагнитных полей. В отличие от классических методов, основанных на решении прямых задач геоэлектрики, данный метод применяет специально поставленную обратную задачу. Разработаны пакеты новых аналитических решений трехмерных задач геоэлектрики.

**Ключевые слова:** аналитические решения, прямая и обратная задачи, электроразведка.

### Analytical solutions of Three-dimensional Goelectric Problems

V. P. Gubatenko, I. G. Moskovskiy

A method for obtaining analytical solutions of Maxwell equations is proposed for stationary and alternating electromagnetic fields. In contrast to traditional methods of finding the analytical solutions, based on the solution of direct problems of electrical prospecting, this method uses a specially posed inverse problem. A package of new analytical solutions of three-dimensional problems of electrical prospecting is designed.

**Key words:** analytical solutions, the direct and inverse problems, electrical prospecting.

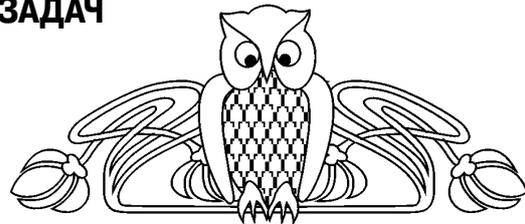
### ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] поставлена обратная задача геоэлектрики – отыскание магнитной проницаемости, электропроводности и напряженности магнитного поля по заданной в некоторой односвязной области напряженности электрического поля. Сформулированы условия существования решения этой задачи, а также изложен метод ее решения для постоянных токов и переменного монохроматического электромагнитного поля. В работе [2] представлены простейшие примеры, в частности двумерные задачи, иллюстрирующие предложенный метод нахождения аналитических решений уравнений Максвелла.

В настоящей статье рассмотрим пакеты аналитических решений трехмерных задач геоэлек-

сейна (зона Dorsoplanites panderi) // Тр. / НИИ геологии. Новая серия. 2004. Т. 17. 110 с.

9. Букина Т. Ф. Наноструктуры как индикаторы процессов седиментогенеза в бассейнах триаса и юры Прикаспия, Мангышлака и Западной Сибири. // Проблемы синергетики и эволюции геосфер : материалы Всерос. науч. симп., Саратов, 2008. С. 111–118.



трики, применение которых позволит проводить качественную и количественную интерпретацию полевых результатов электроразведки для сложнопостроенных геологических сред.

### 1. Трехмерные аналитические решения для стационарного электромагнитного поля

Пусть  $V$  – односвязная область евклидова пространства  $R^3$ . Для этой области рассмотрим всевозможные модели геологических сред с различными электрическими свойствами. Вначале исследуем стационарное электромагнитное поле для линейной изотропной среды. В случае отсутствия в  $V$  области источников электромагнитного поля векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  напряженностей электрического и магнитного поля, электропроводность  $\sigma$  и магнитная проницаемость  $\mu$  связаны соотношениями (уравнениями Максвелла для стационарных полей)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}, \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mu \mathbf{H} = 0. \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем предположим, что векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , а также параметры среды  $\sigma$  и  $\mu$  являются достаточно гладкими и отличными от нуля функциями. В случае неограниченной области  $V$  дополнительно потребуем, чтобы  $\mathbf{E} \rightarrow 0$ ,  $\mathbf{H} \rightarrow 0$  при бесконечном удалении от границы этой области.

Можно поставить следующую обратную задачу: по заданному в области  $V$  вектору  $\mathbf{E}$  (или  $\mathbf{H}$ ) найти в этой области отличные от нуля  $\sigma$  и  $\mu$ , а также вектор  $\mathbf{H}$  (или  $\mathbf{E}$ ), обращающие соотношение (1) в тождество. Показано [1], что если в области  $V$  задан вектор  $\mathbf{E}$ , то решение обратной задачи существует тогда и только тогда, когда  $\mathbf{E}$  является произвольным отличным от нуля потенциальным вектором, причем это решение не единственное. Если же в области  $V$  задан вектор  $\mathbf{H}$ , то решение обратной задачи существует и не



единственное в том и только в том случае, когда вектор  $\mathbf{H}$  удовлетворяет в области  $V$  дифференциальному уравнению

$$(\text{rot } \mathbf{H}, \text{rot rot } \mathbf{H}) = 0,$$

при этом  $\text{rot } \mathbf{H} \neq 0$ .

Различные решения обратной задачи для заданного потенциального вектора  $\mathbf{E}$  можно найти, например, по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \text{grad } \phi &\Rightarrow \text{div}(\sigma \text{grad } \phi) = \\ &\stackrel{\text{Set}}{=} 0 \Rightarrow \sigma \Rightarrow \sigma \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{H} \Rightarrow \\ &\stackrel{\text{Set}}{\Rightarrow} \text{div } \mu \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mu, \end{aligned} \quad (2)$$

где импликация  $A \Rightarrow B$  обозначает, что  $A$  влечет множество решений  $B$ .

В соответствии с этой схемой решение обратной задачи состоит из следующих этапов:

- 1) задается скалярная функция  $\phi$  и находится вектор  $\mathbf{E} = \text{grad } \phi$ ;
- 2) находится электропроводность  $\sigma$  из уравнения  $\text{div}(\sigma \text{grad } \phi) = 0$  (решение не единственное);
- 3) находится вектор  $\mathbf{H}$  из уравнения  $\sigma \mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{H}$  (решение не единственное);
- 4) определяется магнитная проницаемость  $\mu$  из уравнения  $\text{div } \mu \mathbf{H} = 0$  (решение не единственное).

Если же в области  $V$  задан вектор  $\mathbf{H}$ , то решение обратной задачи находится по схеме

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{H}, \text{rot rot } \mathbf{H}) = 0 &\stackrel{\text{Set}}{\Rightarrow} \mathbf{H} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \text{rot} \left( \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{H} \right) &= 0 \Rightarrow \sigma \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{H}, \\ \text{div } \mu \mathbf{H} &= 0 \Rightarrow \mu. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$1.1. \quad \mathbf{E} = \Phi_3(e^{az} \sin ax \sin ay)[\text{ctg } ax \mathbf{i} + \text{ctg } ay \mathbf{j} + \mathbf{k}],$$

$$\mathbf{H} = e^{az} \Phi_2[e^{az}(\cos ax - \cos ay)] \cdot (\sin ax \mathbf{i} + \sin ay \mathbf{j} - (\cos ax + \cos ay) \mathbf{k}),$$

$$\sigma = -2e^{2az} \sin ax \sin ay \frac{\Phi_2'[e^{az}(\cos ax - \cos ay)]}{\Phi_3(e^{az} \sin ax \sin ay)}, \quad \mu = \Phi_1[e^{az}(\cos ax - \cos ay)].$$

$$2.1. \quad \mathbf{E} = \Phi_3[(x+y)(x-y+2z)] \cdot [(x+z) \mathbf{i} + (z-y) \mathbf{j} + (x+y) \mathbf{k}],$$

$$\mathbf{H} = \Phi_2(x-y-z) \cdot [(x+2y-z) \mathbf{i} + (2x+y+z) \mathbf{j} + (-x+y-2z) \mathbf{k}],$$

$$\sigma = \frac{3\Phi_2'(x-y-z)}{\Phi_3[(x+y)(x-y+2z)]}, \quad \mu = \Phi_1(x-y-z).$$

$$3.1. \quad \mathbf{E} = \frac{1}{x^2} \Phi_3\left(\frac{y}{x}\right) \cdot (-y \mathbf{i} + x \mathbf{j}), \quad \mathbf{H} = \Phi_2[z(x^2 + y^2)] \cdot (x \mathbf{i} + y \mathbf{j} - 2z \mathbf{k}),$$

Предложенной схеме соответствуют следующие этапы:

1) задается вектор  $\mathbf{H}$ , являющийся частным решением уравнения  $(\text{rot } \mathbf{H}, \text{rot rot } \mathbf{H}) = 0$ ;

2) определяется электропроводность  $\sigma$  из уравнения  $\text{rot} \left( \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{H} \right) = 0$  (решение не единственное);

3) находится вектор  $\mathbf{E}$  из соотношения  $\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \text{rot } \mathbf{H}$ ;

4) находится магнитная проницаемость  $\mu$  из уравнения  $\text{div } \mu \mathbf{H} = 0$  (решение не единственное).

Таким образом, если найдено аналитическое решение обратной задачи, то семейство функций  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mu, \sigma\}$  обращает соотношения (1) в тождества. Следовательно,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  являются аналитическими решениями стационарных уравнений Максвелла для найденных в ходе решения обратной задачи параметров среды  $\sigma$  и  $\mu$ .

Заметим, что метод нахождения аналитических решений уравнений Максвелла, основанный на задании вектора  $\mathbf{E}$ , обладает большей общностью и простотой, чем только что рассмотренный метод. Действительно, применение метода нахождения аналитического решения по заданному вектору  $\mathbf{H}$  возможно, если  $\mathbf{H}$  является решением уравнения  $(\text{rot } \mathbf{H}, \text{rot rot } \mathbf{H}) = 0$  при условии  $\text{rot } \mathbf{H} \neq 0$ . Однако различные решения этого уравнения могут быть найдены с помощью схемы (2).

Приведем примеры аналитических решений уравнений (1) для трехмерных распределений электропроводности  $\sigma$  и магнитной проницаемости  $\mu$ :



$$\sigma = x^2(x^2 + y^2 + 4z^2) \cdot \frac{\Phi_2'[z(x^2 + y^2)]}{\Phi_3\left(\frac{y}{x}\right)}, \mu = \Phi_1[z(x^2 + y^2)].$$

4.1. 
$$\mathbf{E} = \Phi_3[a(b-c)x - (a^2 + c^2 + bc)y + (a^2 + b^2 + bc)z] \cdot [a(b-c)\mathbf{i} - (a^2 + c^2 + bc)\mathbf{j} + (a^2 + b^2 + bc)\mathbf{k}],$$

$$\mathbf{H} = \Phi_2[(b+c)x - a(y+z)] \cdot (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}),$$

$$\sigma = \frac{\Phi_2'[(b+c)x - a(y+z)]}{\Phi_3[a(b-c)x - (a^2 + c^2 + bc)y + (a^2 + b^2 + bc)z]}, \mu = \Phi_1[(b+c)x - a(y+z)].$$

5.1. 
$$\mathbf{E} = \Phi_3(by - az) \cdot (b\mathbf{j} - a\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{H} = \Phi_2[x(ay + bz)] \cdot [(a^2 + b^2)x\mathbf{i} - a(ay + bz)\mathbf{j} - b(ay + bz)\mathbf{k}],$$

$$\sigma = [(a^2 + b^2)x^2 + (ay + bz)^2] \cdot \frac{\Phi_2'[x(ay + bz)]}{\Phi_3(by - az)}, \mu = \Phi_1[x(ay + bz)].$$

6.1. 
$$\mathbf{E} = \frac{1}{a \cdot x^2} \Phi_3\left(\frac{y}{x}\right) \cdot (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}),$$

$$\mathbf{H} = \frac{e^{az}}{\rho} \Phi_2[az + f(a\rho)] \cdot (-xJ_1(a\rho)\mathbf{i} - yJ_1(a\rho)\mathbf{j} + \rho J_0(a\rho)\mathbf{k}),$$

$$\sigma = \frac{a^2 x^2 e^{az} [J_0^2(a\rho) + J_1^2(a\rho)]}{\rho J_1(a\rho)} \cdot \frac{\Phi_2'[az + f(a\rho)]}{\Phi_3\left(\frac{y}{x}\right)}, \mu = \Phi_1[az + f(a\rho)],$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, f(t) = \int \frac{J_0(t)}{J_1(t)} dt.$$

7.1. 
$$\mathbf{E} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \Phi_3\left(\frac{x-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \cdot [(y^2 + xy + z^2)\mathbf{i} - (x^2 + xy + z^2)\mathbf{j} + (yz - xz)\mathbf{k}],$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \Phi_2\left(\frac{x+y}{z}\right) \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}),$$

$$\sigma = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\Phi_2'\left(\frac{x+y}{z}\right)}{\Phi_3\left(\frac{x-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)}, \mu = \Phi_1\left(\frac{x+y}{z}\right).$$

8.1. 
$$\mathbf{E} = \frac{1}{x^2} \Phi_3\left(\frac{y}{x}\right) \cdot (y\mathbf{i} - x\mathbf{j}),$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{x^2 + y^2} \Phi_2(x^2 + y^2 - 4z) \cdot [2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}],$$



$$\sigma = \frac{2x^2(x^2 + y^2 + 4)}{x^2 + y^2} \cdot \frac{\Phi_2'(x^2 + y^2 - 4z)}{\Phi_3\left(\frac{y}{x}\right)}, \quad \mu = \Phi_1(x^2 + y^2 - 4z).$$

$$\begin{aligned} 9.1. \quad \mathbf{E} &= \Phi_3[4(y+z)^2 - 2(y+z)(x-z) - 5(x-z)^2] \cdot \\ &\quad [(-5x - y + 4z)\mathbf{i} + (-x + 4y + 5z)\mathbf{j} + (4x + 5y + z)\mathbf{k}], \\ \mathbf{H} &= \Phi_2(x - y + z) \cdot [(x + 3y + 2z)\mathbf{i} + (3x + 2y - z)\mathbf{j} + (2x - y - 3z)\mathbf{k}], \\ \sigma &= \frac{\Phi_2'(x - y + z)}{\Phi_3[4(y+z)^2 - 2(y+z)(x-z) - 5(x-z)^2]}, \quad \mu = \Phi_1(x - y + z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 10.1. \quad \mathbf{E} &= \Phi_3(bx - ay) \cdot (-b\mathbf{i} + a\mathbf{j}), \\ \mathbf{H} &= e^{ax+by} \Phi_2[e^{ax+by} \sin(cz + d)](a \cos(cz + d)\mathbf{i} + b \cos(cz + d)\mathbf{j} - c \sin(cz + d)\mathbf{k}), \\ \sigma &= ce^{2(ax+by)} \cdot \frac{\Phi_2'[e^{ax+by} \sin(cz + d)]}{\Phi_3(bx - ay)}, \quad \mu = \Phi_1[e^{ax+by} \sin(cz + d)], \\ &\quad a^2 + b^2 = c^2. \end{aligned}$$

В этих формулах  $J_0(t)$  и  $J_1(t)$  – функции Бесселя действительного аргумента нулевого и первого порядков соответственно. Здесь  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_3$  – произвольные непрерывно дифференцируемые функции соответствующих аргументов. В заданной области  $V$  эти функции всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось условие физической реализуемости:  $\sigma > 0$ ,  $\mu > 0$ . Полагая же  $\Phi_1 = \mu_0 = \text{const}$ , получаем решения для немагнитной геологической среды ( $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м) – основной модели структурной электроразведки.

## 2. Трехмерные аналитические решения для переменного монохроматического электромагнитного поля

Аналогичный метод нахождения аналитических решений уравнений Максвелла можно построить для переменных электромагнитных полей в частотной области для линейной изотропной среды. Запишем для этого случая в односвязной области  $V \subset R^3$  однородные уравнения Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного поля;  $\sigma$  и  $\mu$  – скалярные комплекснозначные электропроводность и магнитная проницаемость, зависящие от координат  $x, y, z$  и круговой частоты  $\omega$ ;  $i$  – мнимая единица.

Функции  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\sigma$  и  $\mu$  будем рассматривать в области  $\omega > 0$ . Продолжение этих функций в область  $\omega < 0$  очевидно и основано на условии эрмитовости.

Обратная задача для переменного электромагнитного поля формулируется следующим об-

разом: по заданному в области  $V$  вектору  $\mathbf{E}$  (или  $\mathbf{H}$ ) найти в этой области скалярные функции  $\sigma$  и  $\mu$ , а также вектор  $\mathbf{H}$  (или  $\mathbf{E}$ ), обращающие соотношения (3) в тождества.

Заметим, что достаточно рассмотреть метод решения этой задачи только для заданного вектора  $\mathbf{E}$ . В случае заданного вектора  $\mathbf{H}$  можно воспользоваться принципом перестановочной двойственности, т. е. применить формальные замены  $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{H}$ ,  $i\omega\mu \leftrightarrow \sigma$ .

Показано [1], что если для заданного вектора  $\mathbf{E}$  существует решение обратной задачи, то в каждой точке  $M \in V$  выполняется одно из двух условий:

$$\begin{aligned} \text{либо } &(\mathbf{E}(M, \omega), \text{rot } \mathbf{E}(M, \omega)) = 0, \\ &(\text{rot } \mathbf{E}(M, \omega), \text{rot rot } \mathbf{E}(M, \omega)) = 0, \\ \text{либо } &(\mathbf{E}(M, \omega), \text{rot } \mathbf{E}(M, \omega)) \neq 0, \\ &(\text{rot } \mathbf{E}(M, \omega), \text{rot rot } \mathbf{E}(M, \omega)) \neq 0. \end{aligned}$$

Если всюду в области  $V$  справедливо условие

$$\begin{aligned} &(\mathbf{E}(M, \omega), \text{rot } \mathbf{E}(M, \omega)) = 0, \\ &(\text{rot } \mathbf{E}(M, \omega), \text{rot rot } \mathbf{E}(M, \omega)) = 0, \end{aligned}$$

то векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно ортогональны. Частным случаем таких полей являются двумерные электромагнитные поля. Однако, как мы покажем на различных примерах, это условие может выполняться также для трехмерного распределения параметров среды.

Если геологическая среда немагнитная, то, как в случае ортогональных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , так и не ортогональных, поставленная обратная задача имеет решение тогда и только тогда [1], когда заданное векторное поле  $\mathbf{E}$  является решением нелинейного уравнения



$$\mathbf{E} \times \text{rot rot } \mathbf{E} = 0. \quad (4)$$

Таким образом, если заданный вектор  $\mathbf{E}$  удовлетворяет уравнению (4), то для немагнитной среды получаем

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}, \quad \sigma = \frac{(\mathbf{E}, \text{rot rot } \mathbf{E})}{i\omega\mu_0 \mathbf{E}^2}. \quad (5)$$

Иными словами, если  $\mathbf{E}$  – решение уравнения (4), то семейство функций  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mu = \mu_0, \sigma\}$ , где вектор  $\mathbf{H}$  и электропроводность  $\sigma$  определяются соотношениями (5), обращает уравнения (3) в тождества. Отсюда видим, что успех нахождения ана-

литических решений уравнений Максвелла для немагнитных сред определяется возможностью отыскания аналитических решений уравнения (4).

Во всех последующих примерах рассмотрены аналитические решения уравнений (3) для случая немагнитной среды. Фигурирующие в этих примерах произвольные функции  $\Phi, \Psi, \varphi$  и их производные являются непрерывными комплекснозначными функциями своих аргументов;  $a, b, c$  – комплекснозначные функции круговой частоты  $\omega$ . В примерах 1.2–4.2 векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  взаимно ортогональны, а в примерах 5.2–7.2 – не ортогональны.

1.2. 
$$\mathbf{E} = [\Phi(u, v, \omega) + \Psi(w, \omega)][a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}],$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} [(ab\Phi'_v - ac\Phi'_u)\mathbf{i} - (bc\Phi'_u + (a^2 + c^2)\Phi'_v)\mathbf{j} + ((a^2 + b^2)\Phi'_u + bc\Phi'_v)\mathbf{k}],$$

$$\sigma = -\frac{(a^2 + b^2)\Phi''_{uu} + 2bc\Phi''_{uv} + (a^2 + c^2)\Phi''_{vv}}{i\omega\mu_0(\Phi + \Psi)}.$$

где  $u = bx - ay, v = cx - az, w = ax + by + cz$ .

2.2. 
$$\mathbf{E} = [\Phi(v, \omega) + \Psi(w, \omega)][2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}],$$

$$\mathbf{H} = \frac{(x^2 + y^2)\Phi'_v}{i\omega\mu_0 x^2} [x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}],$$

$$\sigma = -\frac{2xy\Phi'_v + (x^2 + y^2)\Phi''_{vv}}{i\omega\mu_0 x^4 (\Phi + \Psi)},$$

где  $v = \frac{y}{x}, w = z(x^2 + y^2)$ .

3.2. 
$$\mathbf{E} = [\Phi(v, \omega) + \Psi(w, \omega)][(a^2 + b^2)x\mathbf{i} + (ay + bz)(a\mathbf{j} + b\mathbf{k})],$$

$$\mathbf{H} = \frac{w\Phi'_v}{i\omega\mu_0 x^2} [b\mathbf{j} - a\mathbf{k}],$$

$$\sigma = -\frac{2x(ay + bz)\Phi'_v + w\Phi''_{vv}}{i\omega\mu_0 x^4 (\Phi + \Psi)},$$

где  $v = \frac{ay + bz}{x}, w = (a^2 + b^2)x^2 + (ay + bz)^2$ .

4.2. 
$$\mathbf{E} = [z^{-1}\Phi(u, v, \omega) + \Psi(w, \omega)][x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}],$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0 z} [(v\Phi + uv\Phi'_u + (1 + v^2)\Phi'_v)\mathbf{i} -$$

$$-(u\Phi + (1 + u^2)\Phi'_u + uv\Phi'_v)\mathbf{j} + (v\Phi'_u - u\Phi'_v)\mathbf{k}],$$

$$\sigma = -\frac{2\Phi + 4u\Phi'_u + 4v\Phi'_v + (1 + u^2)\Phi''_{uu} + 2uv\Phi''_{uv} + (1 + v^2)\Phi''_{vv}}{i\omega\mu_0 z^3 (z^{-1}\Phi + \Psi)},$$

где  $u = \frac{x}{z}, v = \frac{y}{z}, w = x^2 + y^2 + z^2$ .



$$5.2. \quad \mathbf{E} = \Phi(v, \omega)[b e^{bz} \sin by \mathbf{i} + a\mathbf{j}],$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left\{ -abe^{bz} \cos by \Phi'_v \mathbf{i} + b^2 e^{bz} \sin by (\Phi + e^{bz} \cos by \Phi'_v) \mathbf{j} + \right. \\ \left. + [-b^2 e^{bz} \cos by \Phi + (a^2 + b^2 e^{2bz} \sin^2 by) \Phi'_v] \mathbf{k} \right\},$$

$$\sigma = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{(a^2 + b^2 e^{2bz}) \Phi''_{vv}}{\Phi},$$

где  $v = ax + e^{bz} \cos by$ .

$$6.2. \quad \mathbf{E} = \Phi(v, \omega)[\varphi'_u \mathbf{i} - \mathbf{j}],$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu_0} \left\{ \varphi'_u \Phi'_v \mathbf{i} + (\varphi''_{uu} \Phi + \varphi'^2_u \Phi'_v) \mathbf{j} + i [\varphi''_{uu} \Phi + (1 + \varphi'^2_u) \Phi'_v] \mathbf{k} \right\},$$

$$\sigma = -\frac{\Phi''_{vv}}{i\omega\mu_0 \Phi},$$

где  $v = x + \varphi(u, \omega)$ ,  $u = y + iz$ .

$$7.2. \quad \mathbf{E} = \Phi(v, \omega)[a(ay + bz)\mathbf{i} - (a^2 + b^2)x\mathbf{j}],$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left[ 2b(a^2 + b^2)(ay + bz)x \Phi'_v \mathbf{i} + ab(\Phi + 2(ay + bz)^2 \Phi'_v) \mathbf{j} - \right. \\ \left. - [(2a^2 + b^2)\Phi + 2[(a^2 + b^2)^2 x^2 + a^2(ay + bz)^2] \Phi'_v] \mathbf{k} \right],$$

$$\sigma = -\frac{4(a^2 + b^2)[2\Phi'_v + v\Phi''_{vv}]}{i\omega\mu_0 \Phi},$$

где  $v = (a^2 + b^2)x^2 + (ay + bz)^2$ .

Примеры 1.2–4.2 иллюстрируют тот факт, что в немагнитной изотропной среде электромагнитные поля с ортогональными векторами  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  могут существовать не только в случае одномерного и двумерного распределения электропроводности  $\sigma$ , но также в случае трехмерного распределения.

В примерах 5.2–7.2 содержатся выражения для полей магнитного типа [3,4] (поперечно-электрических полей) по отношению к координате  $z$ . Принято считать [3,4], что в изотропной среде с параметрами  $\mu$  и  $\sigma$  эти поля могут существовать при выполнении условий  $\mu = \eta(z)\theta(x, y)$ ,  $\sigma = \xi(z)/\theta(x, y)$ , где  $\eta, \theta$  и  $\xi$  – произвольные достаточно гладкие функции от соответствующих координат. В случае немагнитной среды эти условия имеют следующий вид:  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = \xi(z)$ . Однако примеры 5.2–7.2 показывают, что поля магнитного типа по отношению к координате  $z$  могут существовать в немагнитной изотропной среде также для трехмерного распределения электропроводности  $\sigma$ , и, следовательно, эти примеры обобщают известные результаты.

Аналитические решения уравнений Максвелла составляют теоретическую основу электрогеофизики. Представленные в настоящей работе аналитические решения обладают в силу произвольности фигурирующих в них произвольных функций чрезвычайной общностью и охватывают широкий круг моделей трехмерных геологических сред, включая среды с частотно-дисперсной электропроводностью. Изучение закономерностей поведения электромагнитного поля в таких средах на основе предложенных аналитических решений позволит разработать новые методы структурной электроразведки, направленные на эффективное решение разнообразных геологических задач.

Другое не менее важное применение полученных результатов состоит в тестировании численных методов решений трехмерных прямых и обратных задач электроразведки. Интенсивное развитие численных методов невозможно без сопоставления результатов расчета с точными аналитическими решениями однородных уравнений Максвелла.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-05-00753-а).*



### Библиографический список

1. Губатенко В. П. Построение класса переменных электромагнитных полей для линейных изотропных сред // Недр Поволжья и Прикаспия. 2011. Вып. 66. С. 70–77.
2. Губатенко В. П. Нахождение аналитических решений задач геоэлектрики на основе решения обратной

- задачи // Недр Поволжья и Прикаспия. 2011. Вып. 67. С. 34–46.
3. Кисунько Г. В. Электродинамика полых систем. Л., 1949. 427 с.
4. Mohsen A. Electromagnetic field representation inhomogeneous anisotropic media // Appl. Phys. 1973. Vol. 2, № 3. P. 123–128.

УДК 551.735/736 (470.4/5)

## О РЕГИОНАЛЬНОМ ПРЕДПЕРМСКОМ СТРАТИГРАФИЧЕСКОМ НЕСОГЛАСИИ В РАЗРЕЗАХ ПРИБОРТОВЫХ ЗОН ПРИКАСПИЙСКОЙ ВПАДИНЫ

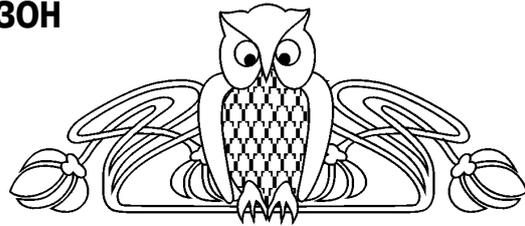
П. Д. Кухтинов\*, Д. А. Кухтинов\*\*

\*ООО "Газпром ВНИИГАЗ", центр ПХГ, Московская обл.

E-mail: pavelkukhtinov@yandex.ru

\*\*Саратовский государственный университет

E-mail: sheglov@nvniigg.san.ru



Проведен анализ фактических данных о несогласиях на границе карбона и перми в разрезах бортовой и внутренней прибортовой зон Прикаспийской впадины и точек зрения на механизм их формирования. Сделан вывод о том, что региональное несогласие формировалось при снижении уровня моря в среднем карбоне (позднебашкирское и верейское время). В среднем-позднем карбоне произошло затопление края шельфа, появилась более глубоководная обстановка с неустойчивым осадконакоплением, с характерными для нее дефицитом осадочного материала (взвеси), уносом его придонными течениями и турбидитными потоками по каньонам на второй уровень седиментации и подводной денудацией, увеличивающей амплитуду несогласия.

**Ключевые слова:** Прикаспийская впадина, прибортовая зона, карбон, пермь, предпермское несогласие.

### On the Regional Prepermian Unconformity in the Sections from the edge Zones of the Pricaspian Depression

P. D. Kukhtinov, D. A. Kukhtinov

Factual data has been analyzed on the unconformities at the Carboniferous-Permian boundary in the sections from the edge and the inner by-edge zones of the Pricaspian Depression; varieties of opinions on the unconformity formation mechanisms have been analyzed, as well. A conclusion has been made that the unconformity generation along the entire perimeter of the Depression has been called forth by the replacement of the Bashkirian shallow-water environment with the deep-water conditions of the Middle-Late Carboniferous, with characteristic sedimentary material (suspended) deficiency and transfer by the near-bottom currents and turbidite flows along the canyons to the second level of sedimentation.

**Key words:** Pricaspian Depression, by-edge zone, Carboniferous, Permian, Prepermian unconformity.

В многочисленных публикациях разных лет отмечалось наличие стратиграфических несогласий в разрезах прибортовой зоны Прикаспийской впадины, приуроченных к границе карбона и перми, а также к различным уровням внутри нижней

перми, что послужило основанием для появления традиционных выводов о связи их с положительными тектоническими движениями на отдельных участках – вплоть до тектонической инверсии всего этого региона. Параллельно возникло предположение о развитии Прикаспийской впадины в позднем палеозое как некомпенсированной депрессии, бортовые зоны которой сложены рифовыми образованиями девона, карбона и нижней перми [1, 2 и др.], обрамленными слоистыми образованиями шельфа со стороны платформы и глубоководными депрессионными отложениями со стороны бассейнового склона.

Данные о несогласии на границе карбона и перми появились еще в 60–70-х годах прошлого века. Так, в работах А. В. Урусова [3] и О. Б. Кетат [4] были изложены данные о том, что в пределах Преддонбасской депрессии, Доно-Медведицкого вала и бортовой зоны Прикаспийской впадины породы ассельского яруса в объеме всех трех зон ложатся на размытую поверхность отложений оренбургского или верхних горизонтов гжельского яруса. В то же время в составе комплекса фузулинид нижней зоны ассельского яруса названы виды *Daixina robusta* Raus., *D. vozhgalensis* Raus., которые являются видами-индексами зоны, венчающей в современной биостратиграфической схеме верхний карбон. Следовательно, в действительности граница систем находится выше отмеченного перерыва и имеет согласный характер.

Указания на наличие в бортовых зонах Прикаспийской впадины предассельского, предпозднеартинского, предпозднекунгурского региональных перерывов имеются в работах многих авторов [5–9], однако выводы базируются зачастую на точечных определениях возраста пород в разрезах, которые переносятся на всю изучаемую толщу и нередко распространяются на весь регион.